

1. Самолет. Ответ: 13 часов.

Решение. Принимаем время аэропорта А за точку отсчета. Пусть время аэропорта Б отстает от времени аэропорта А на a часов, а время аэропорта В опережает время аэропорта А на b часов. Тогда время аэропорта В опережает время аэропорта Б на $b + a$ часов.

Значит, первый перелет длился $a - 1$ часов, второй полет длился

$(24 - 16) + 5 - (a + b) = 13 - a - b$ часов, а третий перелет длился $(11 - 10) + b = 1 + b$ часов. В сумме a и b сокращаются и получается 13 часов.

На самом деле, можно поступить гораздо проще. Самолет отсутствовал в аэропорту А 23 часа.

Всё это время он или находился в воздухе, или стоял в аэропорту. При этом в аэропорту Б он стоял 4 часа, а в аэропорту В $11 - 5 = 6$ часов. Значит, в воздухе он находился $23 - 4 - 6 = 13$ часов.

2. Жмых. Ответ: 37,5 г.

Решение. Пока жмых не съели полностью, часть его будет находиться под водой, а часть над водой (при этом не имеет значения, в какой пропорции). Поэтому рыбка и птичка закончат есть одновременно. За это время рыбка съест

$$\frac{15}{15 + 5} \cdot 150 = 112,5 \text{ г,}$$

а птичка

$$\frac{5}{15 + 5} \cdot 150 = 37,5 \text{ г.}$$

Численные значения плотностей здесь роли не играют.

3. Наклонная плоскость. Ответ: 0,762.

Решение. Введем обозначения: $h = 0,6$ м – высота клина, $l = h/\sin(\alpha) = 1$ м – длина наклонной плоскости, $V_0 = 5$ м/с, $\mu = 0,25$ – коэффициент трения, $g = 10$ м/с². По теореме об изменении кинетической энергии скорость на вершине клина будет равна:

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -\mu mgl \cos \alpha - mgl \sin \alpha \Rightarrow V_1^2 = V_0^2 - 2gl(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$V_1^2 = 25 - 16 \Rightarrow V_1 = 3 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

В этот момент брусок начинает движение под углом к горизонту и через промежуток времени

$$V_1 \sin \alpha - gt = 0 \Rightarrow t = \frac{V_1 \sin \alpha}{g}$$

он достигнет максимальной высоты

$$H = h + \frac{V_1^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 0,762 \text{ м.}$$

4. Чемодан. Ответ: 66.

Решение. По первому ограничению оптимальная коробка должна иметь форму куба со стороной 50 см (именно в этом случае достигается наибольший объем). В таком случае объем будет равен $50^3 = 125000 \text{ см}^3$.

Если выбрать коробку с длиной 220 см, то наибольшим ее объем будет в случае, если два других измерения будут одинаковы и равны $\frac{220}{k}$ см. Тогда объем равен $\frac{220}{k} \cdot \frac{220}{k} \cdot 220 = \frac{220^3}{k^2} \text{ см}^3$.

Эта коробка будет больше по объему, чем кубическая, если $\frac{220^3}{k^2} > 50^3 \Rightarrow k^2 < \left(\frac{220}{50}\right)^3 \Rightarrow k < \sqrt{4,4^3} \approx 9,23$.

Таким образом, наибольшее целое $k = 9$. Тогда объем равен $\frac{220^3}{9^2} \text{ см}^3$, а масса равна $\frac{220^3}{9^2} \cdot 0,5 \text{ г} = 65728,4 \text{ г} \approx 66 \text{ кг}$.

5. Вес. Ответ: 1,8.

$$\begin{aligned} N_1 + F_A - mg &= ma \Rightarrow N_1 = m(a + g) - F_A = 8\rho_0 V(1,25g) - \rho_0 Vg \\ mg - N_2 - F_A &= ma \Rightarrow N_2 = m(g - a) - F_A = 8\rho_0 V(0,75g) - \rho_0 Vg \end{aligned}$$

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{8 \cdot 1,25 - 1}{8 \cdot 0,75 - 1} = \frac{9}{5} = 1,8$$

6. Ученый. Ответ: 219 мкг.

Решение. Если обозначить массу вещества, полученного за n -ю секунду через a_n , то, по

условию: $a_n = a_{n-1} \cdot \frac{(n+4)n}{(n+3)(n-1)}$. Значит,

$$a_1 = 84, \quad a_n = \frac{(n+3)(n-1)}{(n+4)n} \cdot a_{n-1}.$$

Из последнего рекуррентного отношения следует, что

$$a_n \cdot (n + 4) \cdot n = a_{n-1} \cdot ((n - 1) + 4) \cdot (n - 1),$$

то есть произведение $a_n \cdot (n + 4) \cdot n$ является постоянной величиной для любого n . Это означает, что (здесь C – некоторая константа)

$$a_n = \frac{C}{(n + 4)n}.$$

При $n = 1$ получим $a_1 = \frac{C}{5}$, а значит, $C = 420$. Таким образом, нам нужно найти сумму убывающей последовательности

$$\sum_{n=1}^{1800} \frac{420}{(n + 4)n}.$$

Так как $\frac{1}{(n+4)n} = \frac{A}{n+4} + \frac{B}{n} = \frac{n(A+B)+4B}{(n+4)n}$, то выбирая $B = \frac{1}{4}$, $A = -\frac{1}{4}$, получим $\frac{420}{(n+4)n} = 105 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+4} \right)$.

Тогда

$$\sum_{n=1}^{1800} \frac{420}{(n + 4)n} = 105 \cdot \sum_{n=1}^{1800} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n + 4} \right).$$

После упрощений (получилась «телескопическая сумма») остается

$$105 \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{1801} - \frac{1}{1802} - \frac{1}{1803} - \frac{1}{1804} \right).$$

Сумма первых четырех слагаемых равна

$$105 \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{105 \cdot 25}{12} = 218,75.$$

Модуль суммы четырех последних слагаемых

$$105 \cdot \left(\frac{1}{1801} + \frac{1}{1802} + \frac{1}{1803} + \frac{1}{1804} \right) < \frac{105 \cdot 4}{1801} < 0,24.$$

Значит, значение суммы превышает 218,5, но меньше, чем 218,75, то есть ближайшее целое значение есть 219.

(Для справки: более точный ответ: 218,516990...)